

Szakadát István

BME szociológia és kommunikáció tanszék, MOKK

Reláció, szintaktika, szemantika

A reláció fogalmát minden formális elmélet használja valamilyen mértékben. A matematika, a logika alaposan kidolgozta a reláció szintaktikai leírásának elméletét, de a különböző tudományterületek a matematikai relációfogalmaknál szűkebb terjedelmű fogalmakat dolgoztak ki maguknak, hogy nagyobb leíróerejű kategóriakészlettel rendelkezhesse. Ezek a szemantikailag gazdagabb elméletek azonban még nem igazán kapcsolódtak az alsóbb szintaktikai szinthez. A továbblépéshez szükség van a szintaktikai és szemantikai szintek összekapcsolására. A tanulmány megpróbálja összeszedni az ehhez szükséges lépéseket – példák segítségével támogatva az alaposabb megértést.

Bár hosszan lehetne sorolni mindazon tudományágakat, ahol a reláció kategóriájának kiemelt szerepe van,¹ mégis megkockáztatható az állítás, miszerint jelentőségéhez képest relatíve kevés figyelmet szenteltek eddig a fogalom önmagában vett vizsgálatának. Természetesen minden tudásterületen foglalkoztak valahogy és valamennyit a reláció, illetve a kapcsolódó fogalmak problémáival, s különösen így volt ez a matematika területén, de sosem igazán önmaga okán, önmagában vett jelentősége, hanem mindig csak más elméletek megalapozása végett történt mindez. Persze azért a relációkkal kapcsolatos fogalmak tisztázásáért, formalizálásáért tettek ezt-azt a különböző tudásterületeken (a teauruszszabványokban rögzített relációk elkülönítése fontos „előrelépés” volt például a tudásreprezentációs képességek növelésében). A hatvanas-hetvenes évek figyelem az osztályozás problémái iránt ugyan komoly mértékben együtt járt – elsősorban – a generikus relációk vizsgálatával,² de ekkor még mindig kiegészítő szerepében vizsgálták a relációt mint olyat. Az „öncélú” elméleti érdeklődés talán csak a nyolcvanas évek második felében fordult komolyabban a reláció mint önmagában vett kutatási téma felé. Ekkor a rész-egész relációval kapcsolatos problémákat elemezve kezdték el kibontani a mereológia (illetve mereotopológia) tudományát. Aztán jelentős részben a tudásszervezési rendszerek, kisebb részben más tudományterületek irányából az évezredfordulón újabb vizsgálati terület jelent meg: a rendszerek elemei, részei, kategóriái közti relációk típusaival, illetve azok jelentéseivel foglalkozó ún. *relációs szemantika*. Az új elem itt a vizsgálódás fókuszának megváltozása volt: a korábban elhanyagolt relációkat kezdték el végre behatóbban elemezni.³

A relációk tipizálására természetesen sokféle javaslat született. A nyelvészet, a logika, a mesterséges intelligencia, az adatbázis-modellezés, a matematika, az osztályozáselmélet stb. mind megszülte a maga típusait, definícióit, és csak a relációelmélet önállósá válásával van esély arra, hogy az alapfogalom és a hozzá kapcsolódó egyéb fogalmak értelmezése egységesebbé, egyértelműbbé váljon.

A formális logika, formális nyelvelmélet területén a mondatképzés talán legfontosabb összetevője a reláció (illetve a függvény) terminusa, de mindkettő fogalmi primitívként szerepel – formális meghatározás és mindenfajta tipizálás nélkül. Ez a fogalom jelentőségét egyértelműen mutatja, de nem segít minket annak értelmezésében. A nyelvészek sem igazán definiálják az általuk használt relációs fogalmakat, viszont annál inkább megpróbálják tipizálni őket. A különböző szerzők és iskolák a szintaktikai, szemantikai, lexikai, paradigmatis (szinonima, antonima, hiponima/hipernima, troponima, meronima/holonima), szintagmatikus relációkat alkalmazzák. A filozófia, tudásrendezés, könyvtártudomány a tudásszervezési rendszerek (osztályozás, hierarchia, ontológia, teaurusz) relációinak (kompatibilitás, partitív, generikus, oksági relációk stb.) leírásakor már foglalkoznak relációelméleti kérdésekkel, problémákkal, ez az a terület, ahonnan el lehet indulni egy önálló relációelmélet felépítésekor, de az előbb jelzett szakterületeken még nem önálló cél a relációk tulajdonságainak vizsgálata. Az informatika szemantikailag gazdagabb területein (mesterséges intelligencia, adatbázis-modellezés, logika) főleg a következtetési képességekhez kapcsolódó relációkat kezdik elemezni, melynek során már többféle – sokszor egymást fedő – relációs fogalmat is használnak (ISA, AKO, inklúzió, szubszumpció, entail-

ment stb.), de ezek a szakmák viszont bántóan keveset vesznek át más tudományterületek által kitermelt tudásból (és relációs fogalmaiból). A legtöbbet természetesen a formális szintaktikai megközelítést alkalmazó tudományterületek (matematika, logika) mondják el a relációkról. A különböző algebrai tulajdonságok (trichotomítás, dichotomítás, összefüggőség, tranzitivitás, szimmetricitás, reflexivitás) segítségével már minősítik és – szintaktikai szempontok alapján – tipizálják a relációkat (azonosság, egyenlőség, rendezés, tolerancia, eleme, bipoláris, ekvivalencia, rákövetkezés stb.), amivel voltaképpen elvégzik a relációk szintaktikai leírását. A kérdés (és ezzel persze a megvalósítandó cél) az, hogy milyen módon lehet előrelépni a különböző tudományterületeken felhalmozott tudások hasznosításával a relációk szintaktikájának leírásától azok szemantikai tulajdonságainak egységes elméletbe ágyazott tárgyalásáig? A továbbiakban erre a kérdésre próbálunk meg röviden válaszolni.

Relációsintaktika

Ha először a reláció szintaktikai tulajdonságainak elemzését kell elvégeznünk, akkor ezt nyilván a terminus általános fogalmának definiálásával kell kezdenünk. Fontos tény, hogy a reláció meghatározását csak halmazelméleti fogalmak segítségével is megtehetjük, ami azt is jelenti egyben, hogy e kategória meghatározásához nincs szükségünk a halmazelmélethez képest további ontológiai elkötelezettségek megtételére.⁴ A relációt a *rendezett pár* fogalmára lehet visszavezetni, amely viszont egyértelműen kifejezhető halmazok segítségével. Bár sokan *Kasimierz Kuratowski* érdemének tulajdonítják a rendezett pár fogalmának bevezetését,⁵ valójában *Norbert Wiener* volt az, aki elsőként javasolta használatba venni ezt a fogalmat:

„Ezt a meghatározást általában Kuratowskinak tulajdonítják (és valóban az effajta konstrukciót tipikus módon 'Kuratowski-féle rendezett pár'-nak szokták nevezni), melyet Kuratowski 1921-ben publikált először. Azonban Wiener volt az, aki először felismerte, hogy a rendezett pár fogalmát tisztán halmazelméleti úton lehet meghatározni, bár az általa – az 1914-es, 'A relációk logikájának egyszerűsítése' című tanulmányában, illetve az 1913-as téziseiben – megadott definíció közel sem olyan elegáns, mivel az magába foglal egy olyan objektumot is, amely nem tagja a rendezett párnak: $\langle a, b \rangle =_{df} \{ \{0, \{a\}\}, \{b\} \}$. Minden ez miatt helyénvaló elismerni Wiener érdemeit is a rendezett pár definiálásában még akkor is, ha Kuratowski tényleges megoldása az, amit ma mindenki használ.”⁶

A reláció fogalmához tehát előbb a rendezett pár kategóriájára van szükségünk, melyet halmazelméleti alapokból kiindulva határozhatunk meg – igazodva persze ahhoz az elváráshoz, miszerint a rendezett pár esetében fontos a rendezett pár tagjainak sorrendisége. Ezt kifejezhetjük azzal a tulajdonsággal, ahogy két rendezett pár azonosságát definiálni akarjuk:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = b \wedge c = d,$$

ahol a legegyszerűbb – kételemű – rendezett párt ' (a, b) '-vel, illetve ' (c, d) '-vel jelöltük. A rendezett pár halmazelméleti definíciójaként nem használhatjuk azt a kínálózkodó egyszerű lehetőséget, mely szerint a rendezett pár megegyezne a tagjainak halmazával:

$$(a, b) = \{a, b\}$$

Ez az összefüggés azért nem igaz, mert két halmaz akkor egyezik meg egymással, ha az elemeik megegyeznek (a halmaz elemei között nincs rendezettség, sorrend), míg a rendezett pár elemei közti sorrend értelemszerűen és lényegét tekintve kötött. Ha vennénk két halmazt, (a, b) -t és (c, d) -t, akkor a két halmaz azonosságát az alábbi kifejezés segítségével határozhatnánk meg:

$$\{a, b\} = \{c, d\} \Leftrightarrow (a = c \wedge b = d) \vee (a = d \wedge b = c)$$

Ez az egyenlőség pedig ellentmondana a rendezett pár egyenlőségére vonatkozó elvárásunknak, tehát kijelenthetjük, hogy a rendezett pár elsőként ajánlott meghatározása nem fogadható el:

$$(a, b) = \{a, b\}$$

A megfelelő megoldás – Kuratowski javaslata – a következő:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

A fenti egyenlőség kielégíti a rendezett pár egyenlőségére vonatkozó definíciót, ugyanis legyen:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

$$(c, d) = \{\{c\}, \{c, d\}\},$$

ekkor (a halmazok egyenlőségének definíciója miatt) igaz:

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} \Leftrightarrow \{a\} = \{c\} \wedge \{a, b\} = \{c, d\} \vee \{a\} = \{c, d\} \wedge \{a, b\} = \{c\},$$

de kételemű halmaz sosem lehet egyenlő egyelemű halmazzal, ezért a fenti ekvivalencia jobb oldalán levő összetétel második tagja sosem igaz, tehát marad az alábbi ekvivalencia:

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} \Leftrightarrow \{a\} = \{c\} \wedge \{a, b\} = \{c, d\},$$

ez pedig megegyezik a rendezett párok azonosságára adott definícióval.

A rendezett pár fogalma, illetve annak halmazelméleti meghatározása után már megadhatjuk a reláció definícióját is, előtte azonban érdemes még egy rövid kitérőt tenni a relációt adó rendezett pár összetevőire vonatkozóan. A relációban összekapcsolt dolgokat, elemeket, a reláció argumentumait a *relátum* terminussal illelhetjük, melyek se-

gítségével (pontosabban a relátumok egymáshoz való viszonyának figyelembevételével) a relációkat kétféleképpen csoportosíthatjuk. Egyrészt jellemezhetjük őket a reláció relátumainak a számával, amikor is a következő esetek lehetségesek:

- konstans, nulladrendű reláció, 0 argumentumú, relátum nélküli;
- unáris, elsőrendű, 1 argumentumú, 1 relátumú;
- bináris, másodrendű, 2 argumentumú, 2 relátumú;
- ternáris, harmadrendű, 3 argumentumú, 3 relátumú;
- n-áris, n-edrendű, n argumentumú, n relátumú.

Egy adott relációban összekapcsolt relátumok számát a reláció *aritásának* mondjuk. A legelterjedtebb (vagy legalábbis a legelterjedtebben elemzett) reláció a *bináris*, aminek – részben – az lehet az oka, hogy minden magasabb rendű reláció visszavezethető bináris relációk egymás utáni sorozatára. Fontos hangsúlyozni, hogy a reláció rendezett n-eseiben lényeges a relátumok sorrendje, és amennyiben a relátumok sorrendje változik, úgy változik maga a reláció is.

A relációk másik csoportosítási lehetősége abból adódik, hogy vizsgálhatjuk a relátumok homogenitását. Ebből a szempontból a relációkat két nagyobb csoportra oszthatjuk aszerint, hogy a kapcsolatban levő relátumok azonos minőségűek-e, vagyis azonos halmaz elemei, vagy sem? A két lehetséges válasz mentén különíthetjük el egymástól a *homogén*, illetve a *heterogén* relációkat.

Mindezek után a következő – jól ismert, széles körben alkalmazott – meghatározást adhatjuk (egészen pontosan a heterogén reláció fogalmára, de ennek itt most nincs különösebb jelentősége):

Ha A és B nem üres halmaz, $R \subseteq A \times B$ Descartes-szorzat részhalmaza, illetve $x \in A$, $y \in B$, akkor x elem (R -)relációban áll y elemmel, ha $(x, y) \in R$.

A kérdés, vajon az így definiált relációnak milyen további tulajdonságait tudjuk meghatározni?

A relációk algebrai tulajdonságai

Bár bizonyos esetekben hasznos lehet az aritás és a homogenitás dimenziói mentén megtehető relációtípezés, a finomabb leírásokhoz, elemzésekhez további minősítésre, jellemzésre van szükség. Első lépésként a matematikában jól ismert algebrai tulajdonságok szerint minősíthetjük a relációkat. A relációtulajdonságokat négy nagyobb csoportba sorolva definiálhatjuk a *reflexivitási*, a *szimmetri-*

tási, a *transzitivitási*, illetve az *összefüggőségi* tulajdonságokat.

A reflexivitás dimenziójába tartozó tulajdonságok arra utalnak, hogy a reláció értelmezési tartományának elemei önmagukkal relációban állnak-e vagy sem? Mindez azt is jelenti egyben, hogy ez a tulajdonság mindig egy elemmel kapcsolatos minőséget fejez ki. A *szereti* reláció esetén általában arra gondolunk, hogy ' x szereti y -t', de az is értelmes, amikor azt mondjuk, hogy ' x szereti x -et' (vagyis ' x szereti önmagát'). Ha a szereti reláció reflexivitását keressük, akkor az önszeretet vagy öngyűlölet – irodalmilag oly sokszor és sokféleképp feldolgozott – dichotómiájához⁷ jutunk. Nácisz a tó tükrében saját magába szeretett bele, amivel ő híressé, a reláció meg *reflexívvé* vált. Nem csak Náciszok élnek közöttünk, tehát azt kell feltételeznünk, hogy egy embercsoporton belül az a leggyakoribb, amikor mindkét állapot (az önszeretet és öngyűlölet egyaránt) előfordul, a szereti reláció esetében ezért nem igazán tudhatunk egyértelmű állítást tenni a reflexivitással kapcsolatban. Nem ez a helyzet viszont az *anyja* relációval. Ez a reláció nem lehet reflexív, hiszen sosem lehet valaki a saját anyja, tehát ez a reláció *irreflexív*.

A szimmetritás dimenziójával azt fejezhetjük ki, hogy a relációval összekapcsolt két elem között „kölcsonös”, „kétirányú” kapcsolat létezik-e vagy sem? Ekkor tehát a bináris reláció mindkét relátumára figyelünk, viszont nem foglalkozunk az értelmezési tartomány többi elemével. Újra csak a *szereti* relációt vizsgálva Rómeó és Júlia egymás iránti vágyódása a *szimmetrikus* kapcsolat gyönyörű szépirodalmi példája, míg Quasimodo viszonzatlan szerelme Esmeralda iránt az *aszimmetrikus* reláció ismert példája. Ebben a dimenzióban van még egy újabb tulajdonság, az *antiszimmetria*, azonban erre szépirodalmi, hétköznapi példát nem tudunk hozni.

A transzitivitás dimenziójában nem két, hanem már három elem közti összefüggéseket keresünk. Míg a reflexivitás a visszahatás, a szimmetritás a kölcsönhatás, addig a transzitivitás a hatásláncolat problémájával kapcsolatos. Kérdés: ha tudjuk is, hogy a bináris reláció mindig az értelmezési tartomány két eleme között létezik, tudunk-e, tudhatunk-e valamit mondani a reláció fennállására vonatkozóan három elem viszonylatában? Mindez azért fontos, mert ha valahogyan meg lehet haladni a bináris relációk szükségszerű bináris jellegéből fakadó korlátot, akkor remélhetünk valamit állítani tudni a halmaz egészére, több elem közti összefüggésre, ezáltal a rendszer egész struktúrá-

jára vonatkozóan. Ha Zoli felmenője István, akinek felmenője Béla, akkor mondhatjuk, hogy Zoli felmenője Béla is, mert ez a reláció *transzitiv*, és e tulajdonság segítségével már kettőnél több embert is összekapcsolhatunk a rokonsági struktúrán belül (noha bináris relációról beszélünk).

Ahogy a tranzitivitást, a szimmetriát és a reflexivitást széles körben elfogadott módon, viszonylag egységesen tárgyalják a különböző szerzők, úgy nem fogják egybe azokat a relációtulajdonságokat, melyeket mi az összefüggőség dimenziója alatt kívánunk egyszerre tárgyalni. Az összefüggő, erősen összefüggő, dichotóm és trichotóm tulajdonságok mindegyike azzal a kérdéssel foglalkozik, vajon a reláció kiterjed-e az értelmezési tartomány minden elemére vagy sem, illetve ha igen, akkor vannak-e megkötések ezzel kapcsolatban?

A különböző relációtulajdonságok részletes definiálását jelen tanulmányban nem végezzük el, csak egy példát mutatunk valamelyik tulajdonság meghatározására, majd táblázatba gyűjtjük a legfontosabb tulajdonságok formális logikai definícióját. A példa kedvéért vegyük előbb a *reflexív* tulajdonság jól ismert meghatározását:

Ha R az A halmazon értelmezett $R \subseteq A \times A$ Descartes-szorzat részhalmaza, akkor R *reflexív reláció*, amennyiben teljesül, hogy A minden eleme relációban áll önmagával, vagyis $\forall x \in A$ esetén igaz, hogy $(x, x) \in R$.

A fenti szöveges meghatározást formális nyelven az alábbi módon fejezhetjük ki:

$$\forall x(Rxx)$$

Mindegyik relációtulajdonságra megadhatjuk a fentihez hasonló szöveges definíciót (amit most mellőzünk), s a leginkább használt tulajdonságok (illetve azok formális nyelvi meghatározásai) az 1. táblázat szerintiek.

A relációk kardinalitása

A relációk másfajta minősítéséhez, illetve a függvény mint speciális reláció (valamint a művelet mint speciális függvény) meghatározásához szükséges másik dimenzió a relációk *kardinalitása*, ami a relátumok számosságára vonatkozó mennyiségi megszorítás típusát fejezi ki. Utóbbi persze csak kétféle lehet: adott relátumban vagy csak egyetlen elem fordulhat elő, vagy több (amit az 1 vagy az N szimbólumok megadásával jelölhetünk). A relátumok esetén azonban a többitől független megszorításokat kell tételeznünk, így bináris reláció esetén négyféle kardinalitásérték létezik: 1:1-es, 1:N-es, N:M-es és N:1-es.

1. táblázat

Relációtulajdonságok

Reflexivitás	reflexív	$\forall x(Rxx)$
	irreflexív	$\forall x(\neg Rxx)$
	nem reflexív	$\exists x(\neg Rxx)$
Szimmetritás	szimmetrikus	$\forall x \forall y (Rxy \supset Ryx)$
	aszimmetrikus	$\forall x \forall y (Rxy \supset \neg Ryx)$
	antiszimmetrikus	$\forall x \forall y ((Rxy \wedge Ryx) \supset x=y)$
	nem szimmetrikus	$\exists x \exists y (Rxy \wedge \neg Ryx)$
Tranzitivitás	transzitiv	$\forall x \forall y \forall z ((Rxy \wedge Ryx) \supset Rxz)$
	intranszitiv	$\forall x \forall y \forall z ((Rxy \wedge Ryx) \supset \neg Rxz)$
	nem transzitiv	$\exists x \exists y \exists z ((Rxy \wedge Ryx) \wedge \neg Rxz)$
Összefüggőség	összefüggő	$\forall x \forall y (x \neq y \supset (Rxy \vee Ryx))$
	erősen összefüggő	$\forall x \forall y (Rxy \vee Ryx)$
	dichotóm	$\forall x \forall y (x \neq y \supset (Rxy \wedge \neg Ryx) \vee (\neg Rxy \wedge Ryx))$
	trichotóm	$\forall x \forall y (Rxy \wedge \neg Ryx \wedge x \neq y) \vee (\neg Rxy \wedge Ryx \wedge x \neq y) \vee x=y$

A kardinalitás fogalmának szabatos definiálásához szükségünk van még további két segédfogalomra, a kétféle irányból vett *egyértelműség* kategóriáira. Megint csak a példa kedvéért megadjuk a *jobbrol egyértelműség* fogalmának meghatározását:

Ha R az A és B – nem üres – halmazokon értelmezett $R \subseteq A \times B$ Descartes-szorzat részhalmaza, akkor R *jobbrol egyértelmű reláció*, amennyiben A -nak minden x elemére és B -nek minden y és z elemére igaz, hogy ha x és y , illetve x és z relációban állnak, akkor y megegyezik z -vel, vagyis $\forall x \in A, \forall y \in B, \forall z \in B$, melyekre igaz, hogy ha $(x, y) \in R$ és $(x, z) \in R$, akkor $y=z$.

2. táblázat

Relációkardinalitás

A kardinalitás		
típusa	meghatározása	példája
1:1	balról egyértelmű, jobbrol egyértelmű	férj-feleség (monogám házasságban)
1:N	balról egyértelmű, jobbrol egyértelmű	apa-gyerekek vagy férj-feleség (poligám házasságban)
N:1	balról nem egyértelmű, jobbrol nem egyértelmű	szülők-elszülött gyerekek vagy alkalmazott-főnök
N:M	balról nem egyértelmű, jobbrol nem egyértelmű	fivérek-nővérek

A balról egyértelműség a relátumok szerepeinek felcserélésével a fentihez hasonló módon határozható meg, és a kétfajta egyértelműség terminus segítségével a 2. táblázatban meghatározásokat

(illetve példákat) adunk meg a négyféle kardinalitástípusra.

A kardinalitás „lényege” a reláció relátumainak számosságára vonatkozó azon megszorítás, hogy a relátumok egyidejűleg csak egyetlen értéket vehetnek fel. Az effajta korlátozások létét többféle módon és többféle területen lehet (és szokták) hasznosítani. A kardinalitás problémát kiemelten kezelik az adatbázis-modellezés világában, de nekünk itt most az a fontos, hogy a függvény meghatározását is el lehet végezni a segítségével.

Speciális reláció: a függvény

Bár a függvényt speciális relációként értelmezhetjük, mégis szinte minden tudásterületen a reláció fogalmával egyenértékűen kezelik. A formális nyelvelméletben például mind a két terminust egymással egyenrangú fogalmi primitívként adják meg.⁸ Amikor azonban a függvény fogalmára egy elméletben meghatározást adnak, akkor általában a relációból vezetik le a függvény terminusát.⁹ A függvény meghatározásához – többek között – a *jobbról egyértelmű* tulajdonságra lesz szükségünk. Ezt a relációtulajdonságot a függvényképzés szempontjából vett meghatározó jelentősége miatt át is keresztelhetjük *funkcionálisra*, és természetesen az átnevezett tulajdonság meghatározásakor egy az egyben megismételhetjük a jobbról egyértelmű tulajdonság definícióját.

A funkcionális reláció a második relátumában mindig egyetlen értéket enged meg felvenni, ami azért lehet fontos, mert ez esetben az egész relációt felfoghatjuk úgy is, hogy bármilyen konkrét relációelőfordulásról is legyen szó, abban biztosak lehetünk, hogy a második relátum helyén egyetlen (ebben az értelemben egyértelmű) értékünk lesz. Mindez azonban bár fontos, de még nem elégséges feltétel a függvény fogalmának meghatározásához. Biztosítani kellene még azt a feltételt is, hogy minden esetben működjön ez az egyetlen egyértelmű értéket visszaadó „fekete doboz”. Ehhez az kellene, hogy a reláció bal oldalának minden értéke esetén értelmezhető legyen az adott reláció! Ezt a feltételt a *totalitás* tulajdonsága segítségével biztosíthatnánk, amit pedig a következőképpen határozhatunk meg:

Ha R az A és B – nem üres – halmazokon értelmezett $R \subseteq A \times B$ Descartes-szorzat részhalmaza, akkor R *totalis reláció*, amennyiben A -nak minden x elemére létezik B -nek olyan y eleme, hogy x és y relációban állnak, vagyis $\forall x \in A$ esetén $y \in B$, hogy $(x, y) \in R$.

A két új relációtulajdonság segítségével már egyértelműen definiálhatjuk a függvény fogalmát, ugyanis amíg a funkcionális bináris relációt még „csak” részleges függvénynek, addig a *funkcionális és totalis bináris relációt* már *függvénynek* nevezhetjük. Ez a definíciós módszer azonban csak arra igazán jó, hogy be tudjuk mutatni vele, milyen a reláció és a függvény közti átmenet, illetve hogyan vezethető le a függvény a reláció fogalmából, de azt tudnunk kell, hogy ez a függvénymeghatározás eltér a matematikában szokásos gyakorlatól.¹⁰

Relációtulajdonság-lemmák és relációtípusok

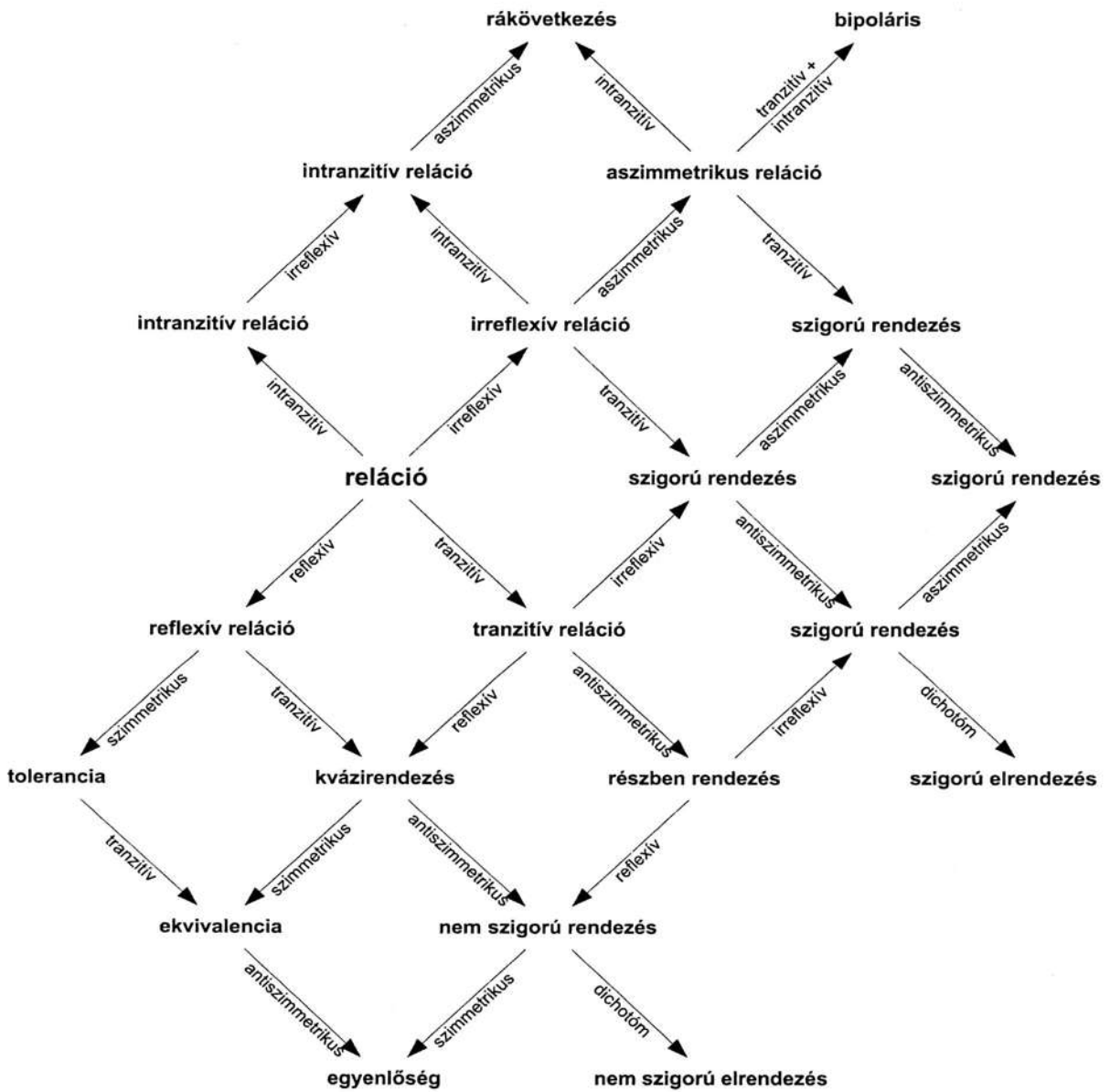
Megint csak nincs mód az alaposabb tárgyalásmódra, de mindenképpen meg kell említenünk, hogy a szintaktikai relációtulajdonságokra támaszkodva olyan lemmákat lehet tételezni (illetve bizonyítani), amelyek a különböző szintaktikai relációtulajdonságok között állapítanak meg összefüggéseket. A szemléltetés kedvéért bemutatunk kettőt közülük:

„Ha R reláció aszimmetrikus, akkor irreflexív.”

„Ha R reláció irreflexív és tranzitív, akkor aszimmetrikus.”

Legalább 15 tételt össze lehet gyűjteni, de jelen tanulmányban eltekintünk mind a lemmák felsorolásától, mind azok bizonyításától. Annál inkább megemlítiük viszont, hogy miután szintaktikai szinten megadtuk a relációk tulajdonságait, ezek alapján már definiálni tudjuk az ismertebb relációkat is – mégpedig nagyon egyszerű módszer segítségével. A jól ismert relációk, mint a rendezés, az ekvivalencia, az egyenlőség, tolerancia stb. úgy határozhatóak meg, hogy megadjuk, milyen relációtulajdonságokkal rendelkeznek. A matematikában régtől fogva ismerik és használják az így definiált relációtípusokat, ám – tudomásunk szerint – csak a hetvenes években próbálták meg a relációtulajdonságok feltüntetésével egyszerre és egységesen ábrázolni ezeket a relációkat. Egy orosz matematikus, *Srejder* volt az, aki először felrajzolta a nevezetes relációkat bemutató relációhálót, amelyet mi most itt néhány új elemmel kiegészítve mutatunk be az 1. ábrán.

Srejder akkor készítette relációhálóját, amikor az egyenlőség, a hasonlóság és a rendezés relációinak problémáival foglalkozott, s emiatt nem volt számára fontos, hogy ezeken túl másfajta relációtípus is illeszthető legyen ábrájába. Ha azonban a három fő relációtulajdonság-csoport (reflexivitás,



1. ábra Srejder relációhálója – kiegészítve

szimmetritás, tranzitivitás) mentén egyszerre akarjuk megjeleníteni az „összes lehetséges” relációt, akkor háromdimenziós ábrára van szükségünk (sőt, ha az összefüggőség tulajdonságcsoportját is figyelembe akarnánk venni, akkor már sok háromdimenziós ábra segítségével lennének képesek minden reláció megjelenítésére).

„Csak” a három főcsoportot mint a térbeli megjelenítés dimenzióit értelmezve felrajzolhatunk tehát egy újfajta ábrát (2. ábra), melyben az áttekinthetőség kedvéért a „belső” kiskockákat kiemelve tehetjük befogadhatóvá az információt.

Az ábrában feltüntetett összefüggéseket a kis kockák segítségével jól lehet láttatni, de a teljes körű reprezentációhoz annyi ábrára lenne szükség, ahány kis kockát meg tudunk jeleníteni a teljes ábrán. Ezt a sorozatot jelen tanulmányban természetesen nem jelenítjük meg.

A szintaktikai relációk definiálásával azonban el is jutottunk addig a pontig, ameddig a matematika, a formális logika eljuthat – a halmazelméleti fogalmak segítségével. Ha a relációk értelmezésben tovább akarunk lépni, akkor már arra van szükségünk, hogy áttérjünk a relációszemantika területére.



2. ábra Relációkocka

Relációs szemantika

Emlékezzünk rá, hogy a reláció fogalmát halmazelméleti terminusokkal tudtuk definiálni, ami azt jelenti, hogy nem kellett további – quine-i értelemben vett – ontológiai elkötelezettséget tennünk. És ez így is maradt mindaddig, amíg a relációk szintaktikai tárgyalását végeztük. Az ezen a szinten megfogalmazott állításainknak minden relációra, relációtulajdonságra érvényeseknek kell lenniük.

Ha tehát a relációszemantika területére lépve új relációkat fogunk definiálni, akkor azok mindegyikét be kell tudnunk sorolni valamelyik szintaktikai szinten megadott relációtípusba. Az új relációk újfajta ontológiai elkötelezettségek megállapításával hozhatók létre, amiből következően egyfelől nyilván szűkebb lesz a terjedelmük, másfelől viszont az új relációfogalmak jelentésüket tekintve pontosabbak lesznek.

A bevezetőben említett relációtípusok közül a legfontosabbak a paradigmikus nyelvi relációk voltak, hiszen az emberi tudás reprezentálására a – terminusok (szavak, kifejezések) között érvényes – paradigmikus relációk a legalkalmasabbak. A paradigmikus relációk tárgyalása azonban messze meghaladja e tanulmány kereteit, itt csak arra van mód, hogy jelezzük a szemantikai szintre lépből fakadó problémákat. A paradigmikus relációk közül a két legfontosabb relációpár a két generikus (vagyis a fajtája és a neve) reláció, illetve a partitív (vagyis a része-egésze) relációpár. Mindkét relációpár mindkét tagja egyaránt reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív, tehát szintaktikailag mindegyikük a nem szigorú rendezési reláció osztályába tartozik. A generikus relációval az osztályozási rendszerek elmélete, a partitív relációval a klasszikus extenzionális mereológia, illetve annak különböző továbbfejlesztései foglalkoznak.

Hogy mégis szemléltetni tudjuk a szemantikai szintre való lépés sajátosságait, illetve az ontológiai elkötelezettség tényleges megvalósulását, bemutatunk egy példát arra vonatkozóan, hogyan lehet axiomatikus módon felépíteni egy adott világ alapfogalmait. A választott terület a rokonsági univerzum lesz, ennek a formális rendjét ismertetjük a továbbiakban.

A rokonsági univerzum ontológiája

A rokonsági univerzum egymással különböző típusú rokoni kapcsolatban levő emberek egymás közti relációjával jellemezhető. Ebbe a körbe tartoznak az olyan terminusok, mint 'apja', 'anyja', 'gyereke', 'anyósa', 'testvére', 'dédapja' stb. A kérdés az, hogy a szintaktikai relációtípusokhoz képest milyen további kategóriákat kell még felvennünk (vagyis milyen ontológiai elkötelezettségeket kell tennünk) ahhoz, hogy minden fontos rokonsági terminust képesek legyünk leírni?

Természetesen van egy kiinduló kategóriánk: az ember mint a vizsgált univerzum primitív alapegysége. És – talán meglepő, de – nem is kell sokkal több új alapterminust felvennünk ahhoz, hogy a rokonsági univerzum összes kategóriáját képesek legyünk visszavezetni alapterminusainkra. Ehhez csupán három biológiai és 1 (+1) társadalmi kategóriára van szükségünk. A szükséges új terminusok a következők:

- gyerek,
- nő,
- idősebb,
- házastárs (jog).¹¹

Az alapterminusokat az alábbi módon definiálhatjuk:

gyerek

Ha **G** az emberek **A** halmazán értelmezett, közvetlen biológiai utóda értelemben vett **rákövetkezési** reláció, akkor a **G** relációt **gyerek** relációnak nevezzük.

nő

Ha **N** az emberek **A** halmazán értelmezett, biológiai nőneműség értelemben vett, **unáris** reláció (egyaragumentumú reláció), akkor az **N** relációt az ember **nő** attribútumának nevezzük.

idősebb

Ha **I** az emberek **A** halmazán értelmezett, biológiai életkora értelemben vett, **szigorú rendezési** reláció, akkor az **I** relációt az **idősebb** relációnak nevezzük.

házastárs

Ha **H** az emberek **A** halmazán értelmezett, valamely **jog** mint norma által szabályozott, szexuális, élet- és háztartásközösséget kifejező, **bipoláris** reláció, akkor a **H** relációt **házastárs** relációnak nevezzük.

Láthatjuk, hogy alapterminusaink mindegyike besorolható valamelyik alapvető szintaktikai relációtípus alá, a terminus pontos jelentését azáltal kaphatjuk meg, hogy valamilyen ontológiai elköteleződést teszünk. A 'gyerek' terminus esetében például a 'rákövetkezési' relációt a biológiai utódlás értelmében tekintjük, ami jelentős mértékben leszűkíti az eredeti – csak szintaktikai értelemben vett – terminus jelentéstartományát. Az 'idősebb' terminusra ugyancsak igaz, hogy gazdagabb, pontosabb szemantikával, de szűkebb terjedelemmel rendelkezik a tisztán szintaktikai jellegű 'szigorú rendezés' terminushoz képest. Választott univerzumunk alapterminusait tehát úgy kapjuk meg, hogy a szintaktikai szinten definiált relációtípusok jelentését azáltal pontosítjuk, hogy bizonyos dolgok létezését tételezzük a világról (pl. léteznek emberek, léteznek biológiai utódok, vagy az embereknek időben kifejezhető kora van).

A rokonsági univerzum maradék kategóriáinak meghatározásához pedig már elégségesek a fentebb definiált terminusok, ezek valamilye kombinációjából definiálni tudhatunk minden más terminust. A továbbiakban azt mutatjuk be, hogy az alapkategóriákra mint fogalmi primitívekre támaszkodva tehetjük-e meg mindezt. A legfontosabb terminusok definíciója a 3. táblázatban látható.

3. táblázat

Rokonsági terminusok meghatározása

Nő	$Rx = \text{def} \forall x (Nx)$
Férfi	$Rx = \text{def} \forall x (\neg Nx)$
Ember	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y ((Nx \wedge \neg Ny) \vee (\neg Nx \wedge Ny))$
Idősebb	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y (lxy)$
Fiatalabb	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y (\neg lxy)$
Gyerek	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y (Gxy)$
Fiú	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y (Gxy \wedge \neg Nx)$
Lány	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y (Gxy \wedge Nx)$
Szülő	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y (Gyx)$
Apa	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y (Gyx \wedge \neg Nx)$
Anya	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y (Gyx \wedge Nx)$
Nagyapa	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y \exists z (Gzx \wedge \neg Nx \wedge Gyz)$
Nagyanya	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y \exists z (Gzx \wedge Nx \wedge Gyz)$
Nagyszülő	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y \exists z (Gzx \wedge Gyz)$
Dédszülő	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y \exists w \exists z (Gwx \wedge Gzw \wedge Gyz)$
Dédapa	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y \exists w \exists z (Gwx \wedge \neg Nx \wedge Gzw \wedge Gyz)$
Dédanya	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y \exists w \exists z (Gwx \wedge Nx \wedge Gzw \wedge Gyz)$
Ükapa	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y \exists v \exists w \exists z (Gvx \wedge \neg Nx \wedge Gvw \wedge Gzw \wedge Gyz)$
Ükanya	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y \exists v \exists w \exists z (Gvx \wedge Nx \wedge Gvw \wedge Gzw \wedge Gyz)$
Unoka	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y \exists z (Gxz \wedge Gzy)$
Unokafiú	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y \exists z (Gxz \wedge \neg Nx \wedge Gzy)$
Unokalány	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y \exists z (Gxz \wedge Nx \wedge Gzy)$
Dédunoka	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y \exists w \exists z (Gwx \wedge Gwz \wedge Gzy)$
Ükunoka	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y \exists v \exists w \exists z (Gvx \wedge Gvw \wedge Gwz \wedge Gzy)$
Testvér	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y \exists z (x \neq y \wedge Gxz \wedge Gyz)$
Vértestvér	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y \exists w \exists z (x \neq y \wedge (Gwx \wedge \neg Nw) \wedge (Gyz \wedge Nz))$
Fivér	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y \exists z (x \neq y \wedge Gxz \wedge Gyz \wedge \neg Nx)$
Báty	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y \exists z (x \neq y \wedge Gxz \wedge Gyz \wedge \neg Nx \wedge lxy)$
Öcs	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y \exists z (x \neq y \wedge Gxz \wedge Gyz \wedge \neg Nx \wedge \neg lxy)$
Nővér	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y \exists z (x \neq y \wedge Gxz \wedge Gyz \wedge Nx \wedge lxy)$
Húg	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y \exists z (x \neq y \wedge Gxz \wedge Gyz \wedge Nx \wedge \neg lxy)$
Nagybácsi	$Rxy = \text{def} \forall x \forall w \exists z (x \neq w \wedge Gxz \wedge Gwz \wedge \neg Nx \wedge Gyw)$
Nagynéni	$Rxy = \text{def} \forall x \forall w \exists z (x \neq w \wedge Gxz \wedge Gwz \wedge Nx \wedge Gyw)$
Unokatestvér	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y \exists w \exists z (x \neq y \wedge Gxw \wedge Gwz \wedge Gyv \wedge Gvz)$
Unokafivér	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y \exists w \exists z (x \neq y \wedge \neg Nx \wedge Gxw \wedge Gwz \wedge Gyv \wedge Gvz)$
Nagybáty	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y \exists w \exists z (x \neq y \wedge \neg Nx \wedge lxy \wedge Gxw \wedge Gwz \wedge Gyv \wedge Gvz)$
Unokaöcs	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y \exists w \exists z (x \neq y \wedge \neg Nx \wedge \neg lxy \wedge Gxw \wedge Gwz \wedge Gyv \wedge Gvz)$

Unokahúg	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y \exists w \exists z (x \neq y \wedge \neg Nx \wedge \neg lxy \wedge Gxw \wedge Gwz \wedge Gyv \wedge Gvz)$
Unokanővér	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y \exists w \exists z (x \neq y \wedge \neg Nx \wedge lxy \wedge Gxw \wedge Gwz \wedge Gyv \wedge Gvz)$
Házastárs	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y (Hxy)$
Élettárs	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y (Éxy)$
Szülőtárs	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y \exists z (x \neq y \wedge Gzx \wedge Gzy)$
Férj	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y (Hxy \wedge \neg Nx)$
Feleség	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y (Hxy \wedge Nx)$
Sógor	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y \exists w \exists z (Hxw \wedge w \neq y \wedge Gwz \wedge Gyz \wedge \neg Ny)$
Sógornő	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y \exists w \exists z (Hxw \wedge w \neq y \wedge Gwz \wedge Gyz \wedge Ny)$
Vő	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y \exists z (Gxz \wedge Nz \wedge Hzy \wedge \neg Ny)$
Meny	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y \exists z (Gxz \wedge \neg Nz \wedge Hzy \wedge Ny)$
Após	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y \exists z (Hxz \wedge Gzy \wedge \neg Ny)$
Anyós	$Rxy = \text{def} \forall x \forall y \exists z (Hxz \wedge Gzy \wedge Ny)$

Láthattuk tehát, hogy a rokonsági univerzum terminusai definiálhatók az univerzum négy alapkategóriája segítségével, míg utóbbiak a szintaktikai relációtípusokba történő besorolással, illetve további ontológiai elkötelezettségek tételezésével egyértelműen meghatározhatóak. A szintaktikailag precíz, de szemantikailag kezelhetetlenül széles terjedelmű relációs alapfogalmak a lét bizonyos elemeinek tételezésével együtt már olyan fogalomkészletet adhatnak a kezünkbe, amellyel már egy olyan hétköznapi jelenségvilágot (illetve terminuskészletet) le tudunk írni, mint a rokonsági univerzum.

Bármennyire is szemléletesnek tűnhet a bemutatott példánk, azt azért nem feledtetheti velünk, hogy a relációs szemantika igazán fontos feladata a közeljövőben mégis csak az, hogy kapcsolatot teremtsen a szintaktikai relációtípusok és a szemantikai-paradigmatikus (különösen a generikus és a partitív) relációk között.

Jegyzetek

- 1 Nagyon sok más terület mellett a matematika, az adatmodellezés, a könyvtártudomány, az információkeresés, az ontológia világát kell itt elsősorban megemlíteni.
- 2 Az osztályozás történetével kapcsolatban lásd: Ungváry–Orbán, 2001. I. kötet.
- 3 Egy éven belül két könyv is megjelent e témakörben: Bean–Green, 2001., illetve Green et al., 2002.
- 4 Itt Quine fogalmát használjuk, és a későbbiekben még bővebben kitérünk e problémakör jelentőségére.
- 5 Lásd például: Chisholm, 1996. p. 52.

Irodalom

- BEAN, Carol A.–GREEN, Rebecca: Relationship in the organization of knowledge. Dordrecht-Boston-London, Kluwer, 2001.
- CHISHOLM, Roderick E.: A realistic theory of categories. An essay on ontology. Cambridge University Press, 1996.
- FERENCZI Miklós: Matematikai logika. Budapest, Műszaki Könyvkiadó, 2002.
- FRIED Ervin: Algebra II. Algebrái struktúrák. Budapest, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2002.
- GREEN, Rebecca–BEAN, Carol A.–MYAENG, Sung Hyon: The Semantics of relationship. An interdisciplinary perspective. Dordrecht-Boston-London, Kluwer, 2002.
- QUINE, Willard Van Orman: A logika módszerei. Budapest, Akadémiai Kiadó, 1968.
- QUINE, Willard Van Orman: A tapasztalattól a tudományig. Osiris, 2002.
- SREJDER, Ű. A.: Egyenlőség, hasonlóság, rendezés. Budapest, Gondolat, 1975.
- UNGVÁRY Rudolf–ORBÁN Éva: Osztályozás és információkeresés. I–II. kötet. Budapest, OSZK, 2001.
- VARZI, A.: Mereology. = Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2003. <http://plato.stanford.edu/entries/mereology>
- WEBER, Max: Gazdaság és társadalom. I. A megértő szociológia alapvonalai. Budapest, KJK, 1987.

Beérkezett: 2004. IX. 7-én.

- ⁶ Chris Menzel hozzászólása a SUO-topikban (<http://suo.ieee.org/ontology/msg01734.html>). Egyébként egyik könyvében Quine is bemutatja Wiener értelmezését, bár a reláció terminusát már ő is Kuratowski megoldása alapján vezeti vissza az osztályokra. Lásd: Quine, 1968. p. 278–283.
- ⁷ Ez a kijelentésünk persze logikailag nagyon pongyola, hiszen a szereti tagadása a 'nem szereti', ami az öngyűlöletől kezdve az önszánalmon, önmegvetésen át az 'önközömbösség' sok mindent jelenthet.
- ⁸ Ennek oka egyébként a függvény rendkívüli hasznossága, de ezt a megállapításunkat helyhiány miatt nem tudjuk bővebben kifejteni.
- ⁹ Bár vannak szerzők, akik éppen fordítva teszik ezt.
- ¹⁰ Persze azt is meg kell akkor jegyeznünk, hogy a szokásos gyakorlat nem jelent kizárólagosságot, hiszen Fried Ervin ugyanezt a definíciót mutatja be egyik könyvében (lásd Fried, 2002. p. 17.) „Egy $f \in A \times B$ reláció akkor és csak akkor tekinthető függvénynek, ha:
1. Minden $x \in A$ elemhez van olyan $y \in B$, hogy $(x, y) \in f$.
 2. Ha $(x, y) \in f$ és $(x, z) \in f$, akkor $y = z$.”
- ¹¹ A zárójelbe tett plusz egy elem, illetve a mindezzel kifejezett bizonytalanság azzal magyarázható, hogy a 'házastárs' mivolt más terminusokra, tehát korábbi ontológiai elkötelezettségekre támaszkodik, ami miatt alaposabb tárgyalás esetén további kategóriák felvételére is szükség lenne. Jelen tanulmányban azonban elegendőnek tartjuk ezt az elemzési szintet is.

Központi német tudományos információs portál

A www.vascoda.de portálról a legkülönbözőbb németországi tudományos információkhoz lehet hozzáférni. A *vascoda* (neve a híres portugál felfedezőnek, Vasco da Gamának állít emléket) a nagy német könyvtárak és információszolgáltatók együttműködésének eredménye. A Szövetségi Oktatási és Kutatási Minisztérium (Bundesministerium für Bildung und Forschung = BMBF) és a Német Kutatói Szövetség (Deutsche Forschungsgemeinschaft = DFG) támogatásával jött létre. A portál több forrást és keresési módszert egyesít, és a könyvtári OPAC-oknak és más bibliográfiai adatbázisoknak köszönhetően elérhetővé teszi a web „rejtett” vagy „láthatatlan” részeit is. Húsz virtuális könyvtárat és négy tudományos információs hálózatot foglal magába, valamint az Electronic Journals Library az elektronikus folyóiratok eléréséhez kínál licencinformációt.

A *vascoda* szolgáltatásai ingyenesek. Az információkereséshez induláskor az interdiszciplináris vagy az alábbi témakörök között lehet választani:

- műszaki és fizikai tudományok,
- élettudományok,
- közgazdaságtan és társadalomtudományok,
- humán tudományok, kulturális adatbázisok.

A források közé tartozik a teljes szövegű folyóirat-cikkek és a témába vágó hiteles honlapok elérése, más médiumok (nyomtatott könyvek és folyóiratok, mikrofilmek stb.) bibliográfiai adatai, egyéb információforrások (évkönyvek, statisztikák, videofilmek stb.)

További információ: <http://www.vascoda.de/>

(Z. D.)